# BAB II
# KAJIAN TEORI

Pada bab ini akan dibahas mengenai definisi-definisi dan teorema-teorema dari nilai eigen, vektor eigen, dan diagonalisasi, sistem persamaan differensial, model *predator prey* lotka-voltera, model logistic, fungsi respon, titik ekuilibrium, linearisasi sistem persamaan nonlinear, analisis kestabilan, bifurkasi, dan *manifold center* yang akan menjadi landasan untuk pembahasan pada bab III.

## A. Nilai Eigen, Vektor Eigen, dan Diagonalisasi

Aplikasi dari aljabar linear terhadap matriks dengan $n$ persamaan dan $n$ variabel didefinisikan sebagai berikut:

**Definisi 2.1: (J.Hale, H.Kocak : 267)**

Nilai $\lambda$ disebut nilai eigen dari matriks $A$ yang berukuran $n \times n$ jika ada vektor bukan nol $v$ sedemikian sehingga,

$$Av = \lambda v \quad \text{.............................................(2.1)}$$

Vektor $\boldsymbol{v}$ disebut vektor eigen dari $A$ ketika berkorespondensi dengan nilai eigen $\lambda$.

Untuk mencari nilai eigen dari matriks $A$ Persamaan (2.1) dapat ditulis kembali menjadi,

$$Av = I\lambda v$$

$$\Leftrightarrow Av - I\lambda v = 0$$

$$\Leftrightarrow (A - I\lambda)v = 0 \quad \text{...............................(2.2)}$$

Karena $v$ merupakan vektor bukan nol, maka $(A - I\lambda) = 0$. Dengan kata lain, Persamaan (2.2) dapat dipenuhi jika dan hanya jika,

$$det(A - I\lambda) = 0$$

Berikut adalah definisi dari determinan matriks $A$ dengan ukuran $n \times n$.

**Definisi 2.2 : (Anton, 1988: 63)**

Misalkan $A$ adalah sebuah matriks berukuran $n \times n$. Fungsi determinan dinyatakan dengan $det$ dan didefinisikan sebagai jumlah semua hasil perkalian elementer yang bertanda dari $A$. Jumlah $det(A)$ dinamakan determinan $A$.

Contoh 2.1 : (nilai eigen real berbeda)

Akan dicari nilai eigen dan vektor eigen dari matriks $A$ berikut :

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian :

$A - I\lambda = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$

$A - I\lambda = \begin{bmatrix} 5 - \lambda & -4 \\ 4 & -5 - \lambda \end{bmatrix}$

Persamaan karakteristiknya adalah

$\det(\mathrm{A} - \mathrm{I}\lambda) = (5 - \lambda)(-5 - \lambda) - (-4)(4) = 0$

$\Leftrightarrow$

$\lambda^2 - 25 + 16 = 0$

$\lambda^2 = 9$

$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = -3$

Sehingga diperoleh nilai eigen dari matriks $A$ adalah 3 dan -3

Selanjutnya akan dicari vektor eigen dari matriks $A$

Misalkan vektor eigen dari $A$ adalah

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

untuk $\lambda_1 = -3$

$A - I\lambda = \begin{bmatrix} 5 - (-3) & -4 \\ 4 & -5 - (-3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

diperoleh,

$8x_1 - 4x_2 = 0$

$4x_1 - 2x_2 = 0$

$\Leftrightarrow x_2 = 2x_1$

sehingga diperoleh vektor eigen

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} x_1$$

untuk $\lambda_1 = 3$

$A - I\lambda = \begin{bmatrix} 5 - (3) & -4 \\ 4 & -5 - (3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 4 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

diperoleh,

$2x_1 - 4x_2 = 0$

$4x_1 - 8x_2 = 0$

$\Leftrightarrow x_1 = 2x_2$

sehingga diperoleh vektor eigen

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} x_2$$

Contoh 2.2 : (nilai eigen kompleks dan berbeda)

Akan dicari nilai eigen dan vektor eigen dari matriks $A$ berikut :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian :

$A - I\lambda = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$

$A - I\lambda = \begin{bmatrix} -\lambda & -4 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix}$

Persamaan karakteristiknya adalah

$\det(\mathrm{A} - \mathrm{I}\lambda) = (-\lambda)(-\lambda) - (-4)(1) = 0$

$\Leftrightarrow \lambda^2 + 4 = 0$

$\Leftrightarrow \lambda^2 = -4$

$\Leftrightarrow \lambda_1 = 2i$ atau $\lambda_2 = -2i$

Sehingga diperoleh nilai eigen dari matriks $A$ adalah $2i$ dan $-2i$.

Selanjutnya akan dicari vektor eigen dari matriks $A$.

Misalkan vektor eigen dari $A$ adalah

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

untuk $\lambda_1 = 2i$

$A - I\lambda = \begin{bmatrix} (-2i) & -4 \\ 1 & (-2i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

diperoleh,

$-2ix_1 - 4x_2 = 0$

$x_1 - 2ix_2 = 0$

$\Leftrightarrow x_2 = -\frac{1}{2} i x_1$

sehingga diperoleh vektor eigen

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} i \end{bmatrix} x_1$$

untuk $\lambda_1 = -2i$

$A - I\lambda = \begin{bmatrix} 2i & -4 \\ 1 & 2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

diperoleh,

$2ix_1 - 4x_2 = 0$

$x_1 + 2ix_2 = 0$

$\Leftrightarrow x_1 = -2ix_2$

sehingga diperoleh vektor eigen

$$\begin{bmatrix} -2i \\ 1 \end{bmatrix} x_2$$

Contoh 2.3 : (nilai eigen kembar)

Akan dicari nilai eigen dan vektor eigen dari matriks $A$ berikut :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian :

$A - I\lambda = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$A - I\lambda = \begin{bmatrix} 3 - \lambda & 0 \\ 0 & 3 - \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Persamaan karakteristiknya adalah

$\det(A - I\lambda) = (3 - \lambda)(3 - \lambda) = 0$

$\Leftrightarrow (3 - \lambda)^2 = 0$

$\Leftrightarrow \lambda_{1,2} = 3$

Sehingga diperoleh nilai eigen dari matriks $A$ adalah 3.

Selanjutnya akan dicari vektor eigen dari matriks $A$.

Misalkan vektor eigen dari $A$ adalah

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

untuk $\lambda = 3$

$$A - I\lambda = \begin{bmatrix} 3-3 & 0 \\ 0 & 3-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

diperoleh,

$3.0 + 0.x_2 = 0$

sehingga diperoleh vektor eigen

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_1 \text{dan} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x_2$$

**Definisi 2.3: (Anton,1991:281)**

Matriks A berukuran $n \times n$ dapat didiagonalisasi jika terdapat matriks P yang dapat di-*invers* sedemikian sehingga $P^{-1}AP$ adalah matriks diagonal. Sehingga dapat dikatakan bahwa matriks $P$ mendiagonalisasi mariks $A$.

**Teorema 2.1 : (Anton, 1991:285)**

Jika $A$ adalah matriks $n \times n$, maka kedua pernyataan berikut ini ekuivalen,

(i) $A$ dapat didiagonalisasi.

(ii) $A$ mempunyai $n$ vektor eigen bebas linear.

Bukti:

(i) $\Rightarrow$ (ii)

Karena $A$ dapat didiagonalisasi maka terdapat matriks $P$ yang memiliki *invers*, misal,

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

sehingga $P^{-1}AP = D$ adalah matriks diagonal, dimana

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

maka,

$\Leftrightarrow PP^{-1}AP = PD$

$\Leftrightarrow AP = PD$

$$AP = \begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 p_{11} & \cdots & \lambda_n p_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1 p_{n1} & \cdots & \lambda_n p_{nn} \end{bmatrix} \ldots\ldots\ldots(2.3)$$

Jika dimisalkan $v_1, v_2, \ldots, v_n$ menyatakan vektor-vektor kolom $P$, maka bentuk (2.3) kolom-kolom $AP$ yang berurutan merupakan $\lambda_1 p_1, \lambda_2 p_2, \ldots, \lambda_n p_n$. Kolom $AP$ yang berurutan adalah $Av_1, Av_2, \ldots, Av_n$. Sehingga diperoleh

$$Av_1 = \lambda_1 p_1, Av_2 = \lambda_2 p_2, \ldots, Av_n = \lambda_n p_n \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots...(2.4)$$

Karena matriks $P$ memiliki *invers*, maka vektor-vektor kolomnya tidak bernilai nol semuanya, jadi berdasarkan Definisi 2.1, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ adalah nilai-nilai eigen $A$, dan $v_1, v_2, \ldots, v_n$ adalah vektor-vektor eigen yang bersesuaian. Karena $P$ memiliki *invers* maka diperoleh bahwa $v_1, v_2, \ldots, v_n$ bebas linear. Jadi $A$ memiliki $n$ vektor eigen bebas linear.

(ii) ⇒ (i)

Karena $A$ mempunyai $n$ vektor eigen bebas linear, misalkan $v_1, v_2, \ldots, v_n$ maka terdapar nilai-nilai eigen yang bersesuaian yaitu $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, dan misalkan

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

adalah matriks yang vektor-vektor kolomnya adalah $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Karena $v_1, v_2, \ldots, v_n$ merupakan vektor eigen dari matriks $A$ dan kolom-kolom dari hasil kali $AP$ adalah $Av_1, Av_2, \ldots, Av_n$, maka

$$Av_1 = \lambda_1 p_1, Av_2 = \lambda_2 p_2, \ldots, Av_n = \lambda_n p_n$$

sehingga diperoleh,

$$AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 p_{11} & \cdots & \lambda_n p_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1 p_{n1} & \cdots & \lambda_n p_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = PD$$

matriks D adalah matriks diagonal yang memiliki nilai-nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ pada diagonal utamanya. Karena vektor-vektor kolom $P$ bebas linear, maka matriks $P$ memiliki *invers*. Jadi $A$ dapat didiagonalisasi. ■

Contoh 2.4:

Tunjukkan bahwa matriks $A$ pada Contoh 2.1 dapat didiagonalisasi.

Penyelesaian:

Berdasarkan Contoh 2.1 matriks A mempunyai 2 vektor eigen yaitu $p1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ dan $p2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Matriks $P$ dapat dibentuk dari vektor-vektor eigen $A$ yaitu

$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, dengan $P^{-1} = \begin{bmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{bmatrix}$

Matriks D didefinisikan sebagai berikut.

$D = P^{-1}AP$

$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

$D = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ adalah matriks diagonal dengan nilai eigen matriks $A$ pada diagonal utamanya. Sehingga dapat ditunjukkan bahwa matriks $A$ dapat didiagonalisasi oleh matriks $P$.■

Contoh 2.5:

Tunjukkan bahwa matriks $A$ pada Contoh 2.2 dapat didiagonalisasi.

Penyelesaian:

Berdasarkan Contoh 2.2 matriks A mempunyai 2 vektor eigen yaitu $p1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0{,}5i \end{bmatrix}$ dan $p2 = \begin{bmatrix} -2i \\ 1 \end{bmatrix}$. Matriks $P$ dapat dibentuk dari vektor-vektor eigen $A$ yaitu

$P = \begin{bmatrix} 1 & -2i \\ -0{,}5i & 1 \end{bmatrix}$, dengan $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & i \\ i/4 & 1/2 \end{bmatrix}$

Matriks D didefinisikan sebagai berikut.

$D = P^{-1}AP$

$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1/2 & i \\ i/4 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2i \\ -0{,}5i & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} i & -2 \\ 1/2 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2i \\ -0{,}5i & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -2i \end{bmatrix}$

$D = \begin{bmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -2i \end{bmatrix}$ adalah matriks diagonal dengan nilai eigen matriks $A$ pada diagonal utamanya. Sehingga dapat ditunjukkan bahwa matriks $A$ dapat didiagonalisasi oleh matriks $P$.■

Contoh 2.6:

Tunjukkan bahwa matriks $A$ pada Contoh 2.3 dapat didiagonalisasi.

Penyelesaian:

Berdasarkan Contoh 2.3 matriks A mempunyai 2 vektor eigen yaitu $p1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ dan $p2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Matriks $P$ dapat dibentuk dari vektor-vektor eigen $A$ yaitu

$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, dengan $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

matriks D didefinisikan sebagai berikut,

$D = P^{-1}AP$

$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ adalah matriks diagonal dengan nilai eigen matriks $A$ pada diagonal utamanya. Sehingga dapat ditunjukkan bahwa matriks $A$ dapat didiagonalisasi oleh matriks $P$.■

## B. Sistem Persamaan Differensial

Menurut Erwin Kreyszig (1993:1) persamaan differensial adalah persamaan yang mengandung turunan – turunan dari suatu fungsi yang tidak diketahui, semisal $y(x)$. Sedangkan sistem persamaan differensial adalah kumpulan dari beberapa persamaan differensial.

Persamaan differensial sangat penting dalam pemodelan matematika khususnya untuk pemodelan yang membutuhkan solusi dari sebuah permasalahan. Misalnya seperti pemodelan matematika dalam bidang biologi khususnya untuk pertumbuhan suatu populasi. Pada dasarnya sistem persamaan differensial terdiri dari sistem persamaan differensial yang linear maupun nonlinear.

Diberikan sebuah sistem persamaan differensial sebagai berikut :

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (2.5)$$

dengan kondisi awal $x_i(t_0) = x_{i0}$

dimana,

$f_i: F \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt}, i = 1,2, \dots, n$ dan $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in F \subseteq \mathbb{R}^n$.

Sistem Persamaan (2.5) dapat ditulis sebagai berikut :

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (2.6)$$

dengan $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in F \subseteq \mathbb{R}^n$ dan $\boldsymbol{f}(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))$, dan syarat awal $\boldsymbol{x}(t_0) = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}) = \boldsymbol{x_0}$.

Sistem persamaan differensial (2.6) disebut sistem *autonomous* karena pada sistem ini bergantung pada waktu secara implisit, sedangkan sistem yang bergantung pada waktu secara explisit disebut sistem *non-autonomous.*

Sistem (2.6) disebut sistem persamaan differensial linear jika $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ masing-masing linear dalam $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Sistem dapat ditulis sebagai

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (2.7)$$

dengan $x \in \mathrm{R}^n$, $A$ matriks berukuran $n \times n$ dan

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \frac{dx_i}{dt} = \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} \end{bmatrix} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (2.8)$$

Dengan kondisi awal $x(0) = x_0$, solusi dari Persamaan (2.8) adalah

$$x(t) = e^{At}x_0 \qquad (2.9)$$

Bukti :

$x(t) = e^{At}x_0$

$\dot{x} = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{de^{At}x_0}{dt}$

$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n t^n}{n!}x_0$

$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(A^0 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{A^n t^n}{n!}\right)x_0$

$\Leftrightarrow 0 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{A^n .n.t^{n-1}}{n!}x_0$

$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{A^n t^{n-1}}{(n-1)!}x_0$

$\Leftrightarrow \left(\frac{A^1 t^0}{0!} + \frac{A^2 t^1}{1!} + \frac{A^3 t^2}{2!} + \cdots\right)x_0$

$\Leftrightarrow \left(A + A^2 t + \frac{A^3 t^2}{2!} + \cdots\right)x_0$

$\Leftrightarrow A(1 + At + \frac{A^2 t^2}{2!})x_0$

$\Leftrightarrow A(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n t^n}{n!})x_0$

$\frac{dx(t)}{dt} = Ae^{At}x_0$

$\dot{x}(t) = Ax(t)$

$\dot{x} = Ax$ ■

Ada tiga kemungkinan bentuk $e^{At}$ yang berkaitan dengan nilai, yaitu

1. Jika matriks $A$ berukuran $n \times n$, memiliki nilai eigen real dan berbeda maka bentuk $e^{At}$ menjadi (Perko L,2001:7)

   $e^{At} = Pdiag[e^{\lambda_j t}]P^{-1}$,

   Dengan $P = [v_1, v_2, \dots v_n]$ adalah matriks yang memiliki *invers*, dan $\lambda$ adalah nilai eigen dari matriksks $A$, dengan $1 \le j \le n$, $j \in N$ dan $diag\left[e^{\lambda_j t}\right] = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$, sehingga Persamaan (2.9) menjadi

   $$x(t) = Pdiag[e^{\lambda_j t}]P^{-1}x_0 \qquad (2.10)$$

2. Jika matriks $A$ berukuran $n \times n$, memiliki $n$ nilai eigen kompleks yang berbeda maka bentuk $e^{At}$ menjadi (Perko L,2001:29)

   $e^{At} = Pdiag\left\{e^{a_j t}\begin{bmatrix}\cos(b_j t) & -\sin(b_j t)\\ \sin(b_j t) & \cos(b_j t)\end{bmatrix}\right\}P^{-1},$

   Dengan $P = [v_1 u_1, v_2 u_2, \ldots v_n u_n]$ adalah matriks yang memiliki *invers*, dan $\lambda_j = a_j \pm ib_j$ adalah nilai eigen dari matriks $A$, dengan $1 \le j \le \frac{n}{2}$, $j \in N$, sehingga Persamaan (2.9) menjadi

   $$x(t) = Pdiag\left\{e^{a_j t}\begin{bmatrix}\cos(b_j t) & -\sin(b_j t)\\ \sin(b_j t) & \cos(b_j t)\end{bmatrix}\right\}P^{-1}x_0 \ldots\ldots(2.11)$$

3. Jika matriks $A$ berukuran $n \times n$, memiliki nilai eigen real yang berulang maka bentuk $e^{At}$ menjadi (Perko L,2001:33)

   $e^{At} = Pdiag\left[e^{\lambda_j t}\right]\left[1 + Nt + \cdots + \frac{N^{k-1}t^{k-1}}{(k-1)!}\right]P^{-1},$

   Dengan $P = [v_1 u_1, v_2 u_2, \ldots v_n u_n]$ adalah matriks yang memiliki *invers*, dan $\lambda$ adalah nilai eigen dari matriks $A$,dan $N$ adalah matriks nilpotent berorde k dimana $N = A - S, S = Pdiag[\lambda_j]P^{-1}$, dengan syarat $N^{k-1} \neq 0$ dan $N^k = 0$, untuk $k \le n$. Sehingga Persamaan (2.9) menjadi

   $$x(t) = Pdiag\left[e^{\lambda_j t}\right]\left[1 + Nt + \cdots + \frac{N^{k-1}t^{k-1}}{(k-1)!}\right]P^{-1}x_0 \ldots\ldots\ldots(2.12)$$

Selanjutnya jika Sistem (2.6) tidak dapat dinyatakan dalam bentuk Sistem (2.7) maka Sistem (2.6) tersebut disebut sistem persamaan differensial nonlinear.

Berikut adalah contoh sistem persamaan differensial linear, yaitu

$$\dot{x} = -y$$
$$\dot{y} = x$$

sedangkan contoh persamaan differensial nonlinear adalah

$$\dot{x} = x^2$$
$$\dot{y} = -xy^2$$

Contoh 2.7a:

Tunjukkan bahwa matiks $N = \begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ adalah matriks nilpotent!

Penyelesaian :

Matrik $N$ dikatakan matriks nilpotent jika matriks $N$ memiliki sifat $N^{k-1} \neq 0$ dan $N^k = 0$, untuk $k \leq n$.

$N = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$N^2 = N \times N = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Jadi telah tertunjukkan bahwa matriks $N$ adalah matriks nilpotent dengan orde 2.

Contoh 2.7:

Akan dicari solusi dari $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}$, dimana $A = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}$

Berdasarkan Contoh 2.1 matriks $A$ memiliki 2 nilai eigen real yang berbeda yaitu $\lambda_1 = 3$ dan $\lambda_2 = -3$ dengan 2 vektor eigen yang bersesuaian yaitu $p1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ dan $p2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Sehingga diperoleh matriks $P$ yang dibentuk dari vektor-vektor eigen $A$ yaitu

$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, dengan $P^{-1} = \begin{bmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{bmatrix}$

Solusi dari sistem tersebut adalah

$x(t) = e^{At}$

$= Pdiag[e^{\lambda_j t}]P^{-1}x_0$

$= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{bmatrix} x_0$

$= \begin{bmatrix} e^{3t} & 2e^{-3t} \\ 2e^{3t} & e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 \end{bmatrix} x_0$

$= \begin{bmatrix} -\frac{e^{3t}}{3} + \frac{4e^{-3t}}{3} & \frac{\frac{2e^{-3t}}{3} - 2e^{-3t}}{3} \\ -\frac{2e^{3t}}{3} + \frac{2e^{-3t}}{3} & \frac{4e^{3t}}{3} - \frac{e^{-3t}}{3} \end{bmatrix} x_0$

Contoh 2.8:

Akan dicari solusi dari $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}$, dimana $A = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Berdasarkan Contoh 2.2 matriks $A$ memiliki 2 nilai eigen kompleks yang berbeda yaitu $\lambda_1 = 2i$ dan $\lambda_2 = -2i$ dengan 2 vektor eigen yang bersesuaian yaitu

$p1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0{,}5i \end{bmatrix}$ dan $p2 = \begin{bmatrix} -2i \\ 1 \end{bmatrix}$. Sehingga diperoleh matriks $P$ yang dibentuk dari vektor-vektor eigen $A$ yaitu

$P = \begin{bmatrix} 1 & -2i \\ -0{,}5i & 1 \end{bmatrix}$, dengan $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & i \\ i/4 & 1/2 \end{bmatrix}$

$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -2i \end{bmatrix}$

Solusi dari sistem tersebut adalah

$$x(t) = e^{At}$$

$$= Pdiag\left\{e^{-2t}\begin{bmatrix} \cos(b_j t) & -\sin(b_j t) \\ \sin(b_j t) & \cos(b_j t) \end{bmatrix}\right\} P^{-1}x_0$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -2i \\ -0{,}5i & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{2t}\cos(0t) & -e^{0.t}\sin(0t) \\ e^{0.t}\sin(0t) & e^{-2t}\cos(0t) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/2 & i \\ i/4 & 1/2 \end{bmatrix} x_0$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -2i \\ -0{,}5i & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/2 & i \\ i/4 & 1/2 \end{bmatrix} x_0$$

$$= \begin{bmatrix} e^{2t} & -2ie^{-2t} \\ -0{,}5ie^{2t} & e^{-2t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/2 & i \\ i/4 & 1/2 \end{bmatrix} x_0$$

$$= \begin{bmatrix} 0{,}5e^{2t} & 0{,}5e^{2t} \\ -0{,}25ie^{2t} + 0{,}25ie^{-2t} & 0{,}5e^{-2t} \end{bmatrix} x_0$$

Contoh 2.9:

Akan dicari solusi dari $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}$, dimana $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

Berdasarkan Contoh 2.3 matriks $A$ memiliki nilai eigen kembar yaitu $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ dengan 2 vektor eigen yang bersesuaian yaitu $p1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ dan $p2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Sehingga diperoleh matriks $P$ yang dibentuk dari vektor-vektor eigen $A$ yaitu

$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ dengan $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Solusi dari sistem tersebut adalah

$$x(t) = e^{At}$$

$$= Pdiag\left[e^{\lambda_j t}\right]\left[1 + Nt + \cdots + \frac{N^{k-1}t^{k-1}}{(k-1)!}\right] P^{-1}x_0$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x_0$$

$$= \begin{bmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix} x_0$$

Perilaku pada sistem persamaan differensial dapat dilihat dari medan arah, orbit, dan potret fase dari sistem tersebut, berikut penjelasan tentang medan arah orbit, dan potret fase.

1. Medan Arah

Setiap titik pada ruang $(t, \boldsymbol{x})$ dimana $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ terdefinisi, ruas kanan Persamaan (2.7) memberikan nilai-nilai dari turunan $\frac{dx}{dt}$ yang dianggap sebagai gradien dari ruas garis pada titik tertentu. Kumpulan dari ruas garis tersebut disebut medan arah dari Persamaan (2.7).

Grafik solusi Persamaan (2.7) yang melalui $x^0$ merupakan kurva pada ruang dimensi $n$ $(t, \boldsymbol{x})$ yang didefinisikan oleh $\{(t, \varphi(t, x^0)) : t \in \boldsymbol{I}_{x^0}\}$.

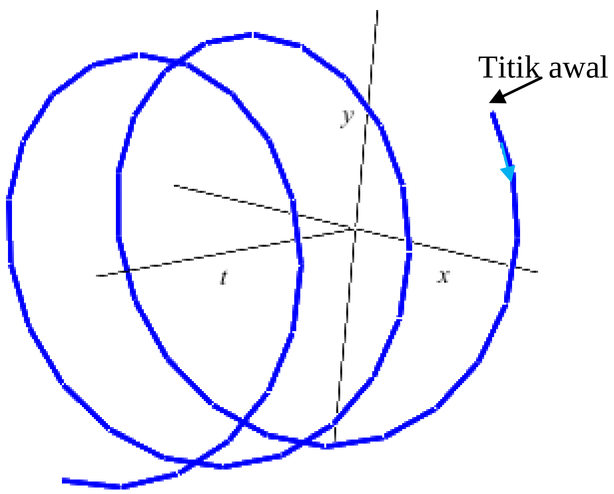
Contoh 2.9 :

Diberikan sistem persamaan differensial sebagai berikut :

$$\dot{x} = y$$

$$\dot{y} = -x \text{........................................(2.12a)}$$

Grafik solusi dari Sistem (2.12a) dengan nilai awal pada titik (1,2) berbentuk spiral yang ditunjukkan pada Gambar 2.1. Pada Gambar 2.1 terlihat bahwa untuk kenaikan waktu$(t)$, kurva akan berputar mengelilingi sumbu $t$ menjauhi bidang-xy. Gambar 2.1 dibuat menggunakan aplikasi Maple 15 dengan perintah pada lampiran 10.

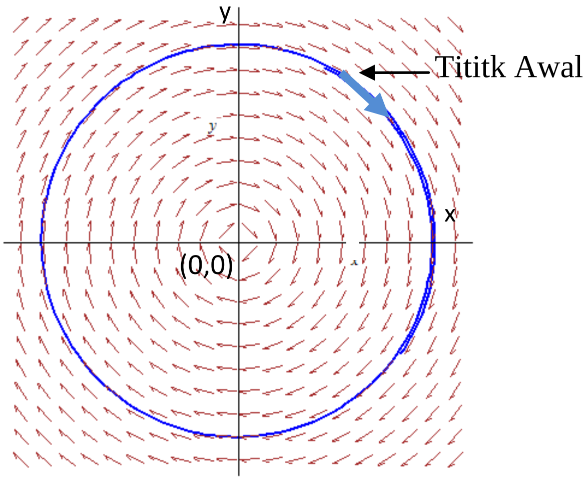



**Gambar 2. 1. Grafik solusi sistem (2.12a) pada ruang $(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$**

Gambar 2.1 menunjukkan bahwa ketika t terus bertambah kurva membentuk spiral, dimana nilai x dan y berulang pada periode 2Π.

2. Orbit

Orbit menurut Hale dan Kocak merupakan proyeksi dari grafik solusi pada bidang-xy. Pada orbit diberi panah untuk mengindikasikan arah dimana $\varphi(t, x^0)$ mengalami perubahan untuk $t$ yang semakin meningkat. Gambar 2.2 merupakan orbit dari Sistem (2.12a) yang dibuat menggunakan aplikasi Maple 15 dengan perintah pada lampiran 10.

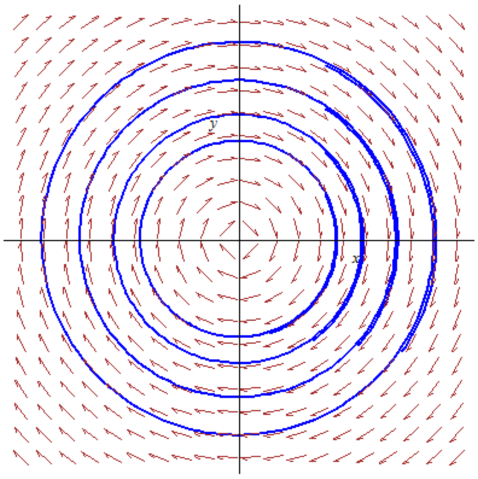



**Gambar 2. 2 Orbit sistem (2.12a)**

Gambar 2.2 menunjukkan bahwa pada kuadran I dan IV ketika nilai x membesar maka nilai y mengecil, sedangkan pada kuadran II dan III ketika nilai x membesar maka nilai y juga membesar, dan nilai solusi (x,y) dari Sistem (2.12a) dengan nilai awal (1,2) memiliki jarak yang sama terhadap titik pusat (0,0), sehingga membentuk suatu lingkaran.

3. Potret Fase

Potret fase dari persamaan differensial menurut Hale dan Kocak merupakan kumpulan dari semua orbit, dengan kata lain potret fase juga merupakan proyeksi dari grafik solusi pada bidang-xy. Pada potret fase juga diberi panah berarah. Gambar 2.1 merupakan potret fase dari sistem (2.12a) yang dibuat menggunakan aplikasi Maple 15 dengan perintah pada lampiran 10.




**Gambar 2. 3 Potret fase sistem 2.12a**

Gambar 2.3 merupakan kumpulan dari grafik solusi pada bidang-xy dengan nilai awal (1;2), (1;1,5), (1;1), dan (1;0,5).

### C. Model *Predator Prey* Lotka-Voltera, Model Logistik, dan Fungsi Respon

Persamaan Lotka-Volterra, juga dikenal sebagai sistem persamaan *predator prey*, yang merupakan sepasang persamaan differensial orde pertama dan non-linear. Persamaan ini adalah persamaan yang masih sederhana. Asumsi dasar dari persamaan Lotka-Voltera bahwa populasi mengalami pertumbuhan dan peluruhan secara exponensial, dimana faktor lain ditiadakan. Berikut sistem persamaan Lotka-Voltera: (Verhulst,1990:180 )

$$\frac{dx}{dt} = x(r - \alpha y) \qquad (2.13)$$

$$\frac{dy}{dt} = y(-d + \beta x) \qquad (2.14)$$

Pada kenyataannya populasi tidak selalu mengalami pertumbuhan secara exponensial dan tidak terbatas, pertumbuhan secara exponensial hanya akan dialami dalam waktu singkat, maka pada abad 19 P.F.Verhulst memperkenalkan model logistik untuk pertama kali. Model pertumbuhan logistik megasumsikan bahwa populasi mangsa tidak selamanya meningkat secara exponensial, ada saat ketika pertumbuhan mangsa melambat karena terbatasnya sumber daya alam (SDA) atau adanya kapasitas maksimal yang disediakan lingkungan. Dengan asumsi tersebut, jumlah populasi dengan model ini akan selalu terbatas pada suatu nilai tertentu. Pada masa tertentu jumlah populasi akan mendekati titik kesetimbangan (ekuilibrium), pada titik ini jumlah kelahiran dan kematian dianggap sama.

Ketika diasumsikan laju populasi akan tumbuh cepat mendekati eksponensial dan tak terbatas maka dapat ditulis model laju pertumbuhan populasi sebagai berikut:

$$\frac{dx}{dt} = ax \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. (2.15)$$

Namun karena keterbatasan sumber daya alam, Persamaan (2.15) dapat ditulis sebagai persamaan berikut,

$$\frac{dx}{dt} = ax - \frac{x}{K}ax$$

$$\frac{dx}{dt} = ax\left(1 - \frac{x}{K}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..\ldots... (2.16)$$

Persamaan (2.16) disebut model logistik.

Pada tahun 1953 Holling memperkenalkan fungsi respon. Fungsi respon *predator* adalah tingkat predasi (daya makan) *predator* terhadap jumlah makanan/mangsa. Sehingga fungsi respon berkaitan erat dengan peningkatan populasi *predator* atau pengurangan populasi *prey* saat saling berinteraksi. Misal fungsi respon dinotasikan dengan $p(x)$ maka $p(x)$ haruslah fungsi nonlinear dan terbatas.

Holling memperkenalkan 3 fungsi respon, yaitu fugsi respon tipe I, fungsi respon tipe II dan fungsi respon tipe III.

Persamaan dari fungsi respon tipe I ini adalah $p(x) = \frac{mx}{a+x}$. Pada fungsi respon tipe I, ketika populasi mangsa meningkat daya konsumsi *predator* pun meningkat, sehingga jumlah populasi *predator* semakin meningkat pula. Persamaan dari fungsi respon tipe II ini adalah $p(x) = \frac{mx^2}{ax^2+bx+c}$. Pada fungsi respon tipe II lebih kompleks dari fungsi respon tipe I karena pada fungsi respon ini memperhatikan waktu *predator* dalam mencerna mangsa. Sedangkan Persamaan dari fungsi respon tipe III ini adalah $p(x) = \frac{mx^2}{a+x^2}$. Fungsi respon tipe III adalah fungsi sigmoidal dimana *predator* yang cenderung akan mencari populasi *prey* yang lain ketika populasi *prey* yang dimakan mulai berkurang. (Ruan,S dan Xiao,D, 2001)

Ketiga fungsi respon tersebut merupakan fungsi monoton naik. Namun ada interaksi *predator prey* yang memiliki sifat yang tidak monoton, yaitu ketika pada jumlah populasi mangsa tertentu, tingkat konsumsi pemangsa menurun karena ada sifat bertahan dari mangsa, yaitu ketika mangsa meningkat tingkat pertahanan kelompoknya pun meningkat.

Persamaan dari fungsi respon tipe IV Monod Haldane yang merupakan pengembangan dari fungsi respon tipe II adalah $p(x) = \frac{mx}{ax^2+bx+c}$. Sedangkan fungsi respon tipe IV Sokol and Howell yang merupakan pengembangan dari fungsi respon tipe III adalah $p(x) = \frac{mx}{a+x^2}$. (Ruan,S dan Xiao,D, 2001)

## D. Titik Ekuilibrium

Solusi dari suatu sistem yang tidak mengalami perubahan terhadap waktu disebut titik ekuilibrium atau titik tetap. Berikut adalah definisi dari titik ekuilibrium pada suatu sistem persamaan differensial,

**Definisi 2.4 : (Perko, 2001: 102)**

Diberikan suatu sistem persamaan differensial $\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(x), x, f(x) \in R$. Titik $\bar{x} \in R$ disebut titik ekuilibrium jika dan hanya jika $f(\bar{x}) = 0$.

Contoh 2.10

Akan dicari titik ekuilibrium dari Sistem (2.13) dan (2.14)

Penyelesaian :

Misal : $f(x) = \frac{dx}{dt} = x(r - \alpha y)$ dan $g(x) = \frac{dy}{dt} = y(-d + \beta x)$

$f(x) = 0$ dan $g(x) = 0$

Sehingga didapat persamaan-persamaan berikut :

$$0 = x(r - \alpha y) \quad \text{.......................................}(2.17)$$

$$0 = y(-d + \beta x) \quad \text{.......................................}(2.18)$$

Dari Persamaan (2.17), diperoleh

$$f(x) = 0 \text{ jika dan hanya jika } x = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.19)$$

atau

$$(r - \alpha y) = 0$$

$$y = \frac{r}{a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.20)$$

Selanjutnya jika kita subtitusikan (2.19) ke (2.18) maka diperoleh

$$y(-d + \beta.0) = 0$$

$$y = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.21)$$

Kemudian subtitusikan Persamaan (2.20) ke Persamaan (2.18)

$$\frac{r}{a}(-d + \beta.x) = 0$$

$$x = \frac{1}{\beta}\left(\frac{a}{r} + d\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.22)$$

Sehingga diperoleh dua titik ekuilibrium yaitu

$T_1$ = (0,0) dan $T_2$ = $\left(\frac{1}{\beta}\left(\frac{a}{r} + d\right), \frac{r}{a}\right)$

## E. Linearisasi Sistem Persamaan Nonlinear

Linearisasi adalah proses melinearkan fungsi nonlinear. Linearisasi dilakukan untuk melihat perilaku sistem di sekitar titik ekuilibrium. Dengan linearisasi pada sistem nonlinear akan diperoleh pendekatan yang baik.

**Definisi 2.5 : (J.Hale, H.Kocak : 267)**

Jika $\bar{x}$ adalah titik ekuilibrium dari $\dot{x} = f(x)$, maka persamaan differensian linear

$$\dot{x} = Df(\bar{x})x$$

Disebut persamaan linearisasi dari *vektor field* $\boldsymbol{f}$ pada titik ekuilibrium $\bar{x}$.

Dimana,

$\boldsymbol{f} = (f_1, f_2)$ dan

$$Df(\bar{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}) \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.23)$$

Matriks $Df(\bar{x})$ disebut sebagai matriks Jacobian.

Contoh 2.11 :

Akan dicari bentuk linear dari Sistem (2.13) dan (2.14) dengan pusat $(x, y) = (0,0)$ menggunakan matriks Jacobian.

Misalkan :

$X = x - x^*$

$Y = y - y^*$

$f_1 = \frac{dx}{dt} = x(r - \alpha y)$

$f_2 = \frac{dy}{dt} = y(-d + \beta x)$

Maka,

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = r - \alpha y \quad \text{(2.24)}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = -\alpha x \quad \text{(2.25)}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = \beta y \quad \text{(2.26)}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} = -d + \beta x \quad \text{(2.27)}$$

Berdasarkan (2.24), (2.25), (2.26), (2.27), diperoleh

$$Df(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(0,0) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(0,0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(0,0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(0,0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - x^* \\ y - y^* \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & -d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}$$

Sehingga,

$\dot{X} = rX$

$\dot{Y} = -dY$

Selain linearisasi menggunaka matriks Jacobian, deret Taylor dan deret Maclaurin juga merupakan salah satu cara untuk melinearisasi.

**Definisi 2.6: (Thomas dan Ross, 1996: 672)**

Misalkan $f(x)$ dapat diturunkan hingga $n$ kali pada $x = a$, maka $f(x)$ dapat dinyatakan sebagai deret kuasa,

$$f(x) = f(a) + f^{'}(a)x + \frac{f^{''}(a)x^2}{2!} + \cdots + \frac{f^{n}(a)x^{n}}{n!} \ldots \quad \text{(2.28)}$$

**Definisi 2.7: (Yuri A. Kuznetsov, 1998: 93)**

Misalkan $f(x,y)$ dapat diturunkan hingga $n$ kali pada $(x,y)=(a,b)$, maka $f(x,y)$ dapat dinyatakan sebagai deret kuasa,

$$f(x,y)=f(a,b)+\frac{\partial f'(a,b)x}{\partial x}+\frac{\partial f'(a)y}{\partial y}+\frac{\partial f''(a,b)xy}{\partial x\partial y}+\cdots+\frac{1}{i!j!}\frac{\partial f^{i+j}(a,b)x^i y^j}{\partial^i x\partial^j y} \quad (2.29)$$

Persamaan (2.28) merupakan deret Taylor dengan satu variabel menggunakan pusat $x=a$, sedangkan Persamaan (2.29) merupakan deret Taylor dengan dua variabel menggunakan pusat $(x,y)=(a,b)$, jika pusat $x=0$ atau $(x,y)=(0,0)$ disebut dengan deret Maclaurin.

Contoh 2.12:

Akan dicari deret Taylor dari $f(x,y)=x(r-\alpha y)$ dengan pusat $(x,y)=(0,0)$.

Penyelesaian :

Dicari : $f(0,0)=0, \frac{\partial f'(0,0)}{\partial x}=r, \frac{\partial f'(0,0)}{\partial y}=0, \frac{\partial f''(0,0)}{\partial x\partial y}=-\alpha$ ..............(2.30)

Sehingga diperoleh deret Taylor dari $f(x,y)$ dengan mensubtitusikan (2.30) ke (2.28) yaitu

$$f(x,y)=rx-\alpha xy+\cdots$$

## F. Analisis Kestabilan

**Definisi 2.8: Olsder:2003:53**

Diberikan sebuah sistem persamaan differensial $\dot{x}=f(x)$, dengan kondisi awal $x(0)=x_0$, dan penyelesaian pada waktu $t$ dinotasikan dengan $x(t,x_0)$, maka

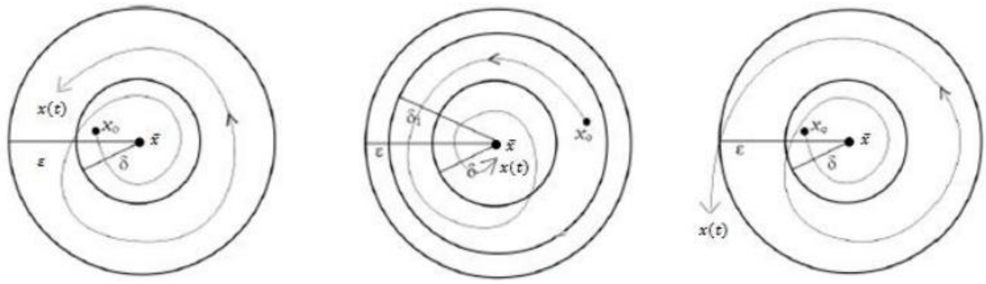
(i) Sebuah vektor $\bar{x}$ yang memenuhi $f(\bar{x})=0$ disebut titik ekuilibrium.

(ii) Sebuah titik ekuilibrium $\bar{x}$ disebut stabil jika untuk setiap $\varepsilon>0$ ada $\delta>0$ sedemikian sehingga, jika $\|x_0-\bar{x}\|<\delta,$ maka $\|x(t,x_0)-\bar{x}\|<\varepsilon$ untuk setiap $t\geq 0$.

(iii) Sebuah titik ekuilibrium $\bar{x}$ disebut stabil asimtotik jika $\bar{x}$ stabil dan ada sebuah $\delta_1>0$ sedemikian sehingga $\lim_{t\to\infty}\|x(t,x_0)-\bar{x}\|=0$ bila $\|x_0-\bar{x}\|<\delta_1$.

(iv) Sebuah titik ekuilibrium $\bar{x}$ tidak stabil jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada $\delta > 0$ sedemikian sehingga, jika $\|x_0 - \bar{x}\| < \delta$, maka $\|x(t, x_0) - \bar{x}\| < \varepsilon$ untuk setiap $t \geq 0$.

Berikut gambar ilustrasi kestabilan titik ekuilibrium yang stabil, stabil asimtotik, dan tidak stabil.




Stabil Stabil Asimtotik Tidak Stabil

**Gambar 2. 4 Kestabilan Titik Ekuilibrium**

Pada Gambar 2.1 terlihat bahwa titik ekuilibrium $\bar{x}$ stabil jika tiap solusi pada waktu $t$ memiliki jarak yang dekat dengan titik ekuilibrium. Titik ekuilibrium $\bar{x}$ stabil asimtotik jika tiap solusi pada waktu $t$ dan pada setiap diambil titik awal, solusi mendekati titik ekuilibrium. Sedangkan titik ekuilibrium $\bar{x}$ dikatakan tidak stabil apabila tiap solusi pada waktu $t$ dan pada setiap diambil titik awal, solusi menjauhi titik ekuilibrium.

Titik ekuilibrium dapat dicari kestabilannya menggunakan nilai eigen pada matriks Jacobiannya $(Df(\bar{x}))$, jika titik ekuilibrium tersebut hiperbolik. Berikut definisi dari titik ekuilibrium hiperbolik,

**Definisi 2.9 (Perko, 2001: 102)**

Titik ekuilibrium $\bar{x}$ dikatakan hiperbolik jika semua nilai eigen dari matriks Jacobian $Df(\bar{x})x$ mempunyai bagian real tak nol.

Berikut adalah teorema mengenai kestabilan titik ekuilibrium berdasarkan nilai eigennya,

**Teorema 2.2 : (Olsder dan Woude, 2003:57)**

Diberikan sistem linear $\dot{x} = Ax$, dengan matriks $A$ berukuran $n \times n$ dan memiliki k nilai eigen yang berbeda $\lambda_i$ untuk $i = 1,2, \dots k$ dan $k \leq n$, maka

(i) Titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ dikatakan stabil asimtotik jika dan hanya jika untuk setiap $Re(\lambda_i) < 0$.

(ii) Titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ dikatakan tidak stabil jika dan hanya jika ada paling sedikit satu $Re(\lambda_i) > 0$.

Bukti :

(i) Akan dibuktikan titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ stabil asimtotik jika dan hanya jika untuk setiap $Re(\lambda_i) < 0$

Penyelesaian :

Pembuktian (ke kanan)

Berdasarkan Definisi (2.8 (ii)), sebuah titik ekuilibrium $\bar{x}$ disebut stabil asimtotik jika $\lim_{t\to\infty} \|x(t, x_0) - \bar{x}\| = 0$. Artinya untuk t mendekati $\infty$, maka $x(t, x_0)$ akan medekati ke $\bar{x} = 0$. Karena $x(t, x_0)$ merupakan solusi dari sistem persamaan differensial, maka berdasarkan Persamaan (2.11), $x(t, x_0)$ selalu memuat $e^{Re(\lambda_i)t}$. Sehingga jika $e^{Re(\lambda_i)t}$ menuju ke $\bar{x} = 0$, maka $Re(\lambda_i)$ haruslah bernilai kurang dari nol/ negatif.

Pembuktian (ke kiri)

Karena $x(t, x_0)$ merupakan solusi dari sistem persamaan differensial, maka $x(t, x_0)$ berdasarkan Persamaan (2.11) selalu memuat $e^{Re(\lambda_i)t}$. Jika $Re(\lambda_i) < 0$ maka untuk $t \to \infty$, $x(t, x_0)$ akan mendekati $\bar{x} = 0$, atau dapat ditulis $\lim_{t\to\infty} \|x(t, x_0) - \bar{x}\| = 0$. Berdasarkan Definisi (2.28 (ii)), titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ stabil asimtotik. ■

(ii) Akan dibuktikan titik ekuilibrium $\bar{x}$ tidak stabil jika dan hanya jika untuk setiap $Re(\lambda_i) > 0$.

Penyelesaian :

Pembuktian (ke kanan)

Titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$ tidak stabil jika untuk $t$ mendekati $\infty$ maka $x(t, x_0)$ mendekati $\infty$. Karena $x(t, x_0)$ solusi dari sistem persamaan differensial maka berdasarkan Persamaan (2.11) $x(t, x_0)$ selalu memuat $e^{Re(\lambda_i)t}$. Sehingga $x(t, x_0)$ mendekati $\infty$ akan terpenuhi jika $Re(\lambda_i) > 0$.

Pembuktian (ke kiri)

Karena $x(t, x_0)$ merupakan solusi dari sistem persamaan differensial, maka $x(t, x_0)$ berdasarkan Persamaan (2.11) selalu memuat $e^{Re(\lambda_i)t}$. Jika $Re(\lambda_i) > 0$ mengakibatkan untuk $t \to \infty$ maka $x(t, x_0)$ mendekati $\infty$ atau dengan kata lain $x(t, x_0)$ menjauhi titik ekuilibrium $\bar{x} = 0$. Sehingga $\bar{x} = 0$ dikatakan tidak stabil.

■

## G. Bifurkasi

**Definisi 2.10 : (Guckenhimer dan Holmes :1985:117)**

Bifurkasi adalah perubahan kualitatif (dalam hal ini kestabilan) suatu sistem yang terjadi akibat perubahan nilai parameter.

Biasanya bifurkasi terjadi pada penyelesaian titik setimbang yang mempunyai paling sedikit satu nilai eigen sama dengan nol pada bagian realnya. Bifurkasi yang paling sederhana untuk dipelajari adalah bifurkasi dimensi-1 dari ekuilibrium dengan satu parameter. Pada kasus ini, diasumsikan persamaan normal dipelajari disekitar solusi-solusi ekuibrium dari sistem. Bifurkasi ini dikenal dengan bifurkasi satu parameter dari sistem. Beberapa jenis bifurkasi satu parameter adalah bifurkasi *saddle node*, bifurkasi *traskritical*, dan bifurkasi *hopf.*

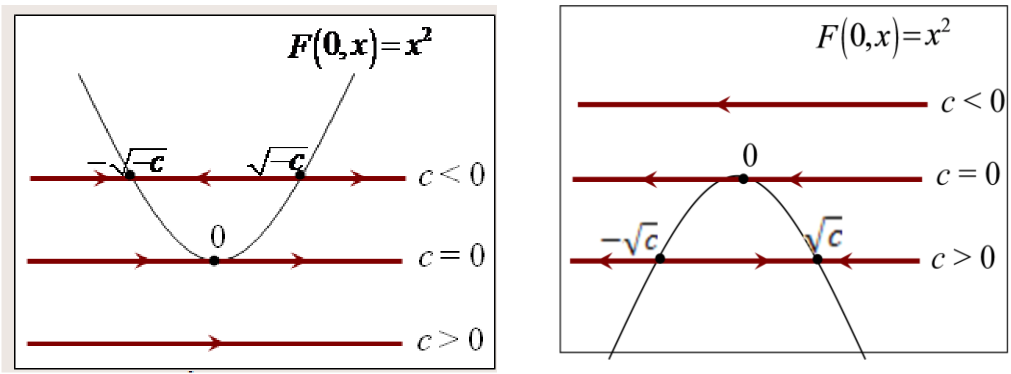
a. Bifurkasi *Saddle Node*

Bifurkasi *saddle node* ditandai oleh bertambahnya titik ekuilibrium dalam suatu diagram bifurkasi semisal pada saat $c = c_0$. Ketika $c > c_0$ bertambah dua titik ekuilibrium dimana salah satu titik stabil dan satunya tidak stabil. Salah satu bentuk sistem berdimensi-1 yang mengalami bifurkasi *saddle node* adalah (Wiggins,2003:366)

$$\dot{x} = c + x^2 \qquad x, c \in R^1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.31a)$$

$$\dot{x} = c - x^2 \qquad x, c \in R^1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.31b)$$

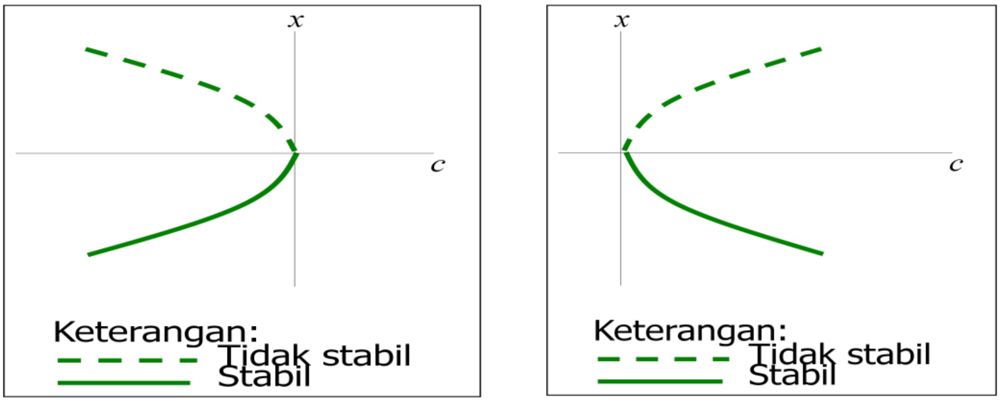
Titik ekuilibrium dari Sistem (2.31a) dan (2.31b) berturut-turut adalah $x = \pm\sqrt{-c}$ dan $x = \pm\sqrt{c}$. Terdapat tiga kondisi yang memenuhi Persamaan (2.31a) dan (2.31b), yaitu saat $c = 0, c < 0,$ dan $c > 0$. Berikut gambar potret fasenya,




(a) Potret fase Persamaan (2.31a) (b) Potret fase Persamaan (2.31b)

**Gambar 2. 5 Potret Fase Bifurkasi *Saddle Node***

Berikut ini diagram bifurkasi *saddle node* persamaan (2.31a) dan (2.31b)




a) Diagram Bifurkasi Persamaan (2.31a) (b) Diagram Bifurkasi Persamaan (2.31b)

**Gambar 2. 6 Diagram Bifurkasi *Saddle Node***

b. Bifurkasi *Transcritical*

Bifurkasi *transcritical* ditandai oleh persilangan dari dua cabang ekuilibrium dalam suatu diagram bifurkasi yang mana tipe ekuilibrium setiap cabang mengalami perubahan kestabilan ketika $c = c_0$. Salah satu bentuk sistem berdimensi-1 yang mengalami bifurkasi *transcritical* adalah (Wiggins,2003: 370)

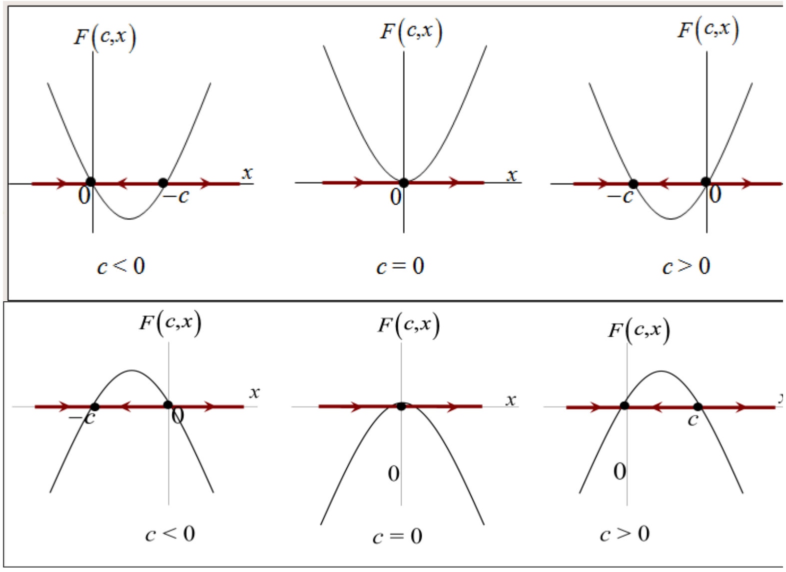
$$\dot{x} = cx + x^2 \qquad x, c \in R^1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.32a)$$

$$\dot{x} = cx - x^2 \qquad x, c \in R^1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.32b)$$

Titik ekuilibrium dari Sistem (2.32a) adalah $x = 0$ dan $x = c$. Terdapat tiga kondisi yang memenuhi Persamaan (2.32a), yaitu saat $c = 0, c < 0, dan\ c > 0$.

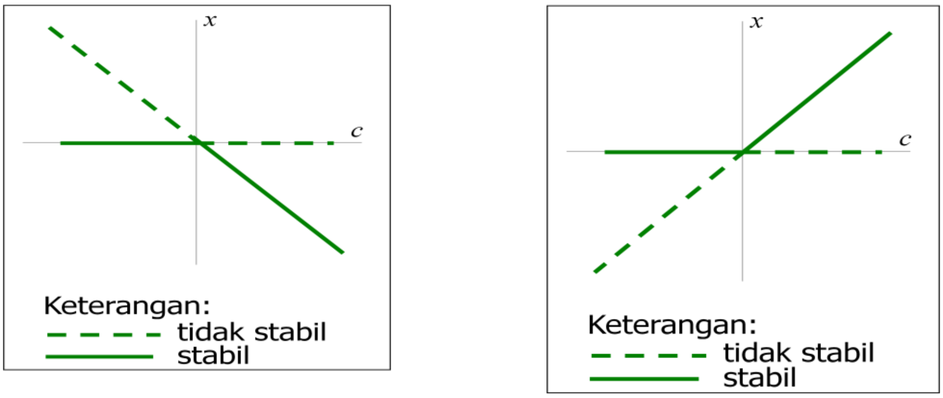
(a) Potret fase Persamaan (2.32a)

(b) Potret fase Persamaan (2.32b)




**Gambar 2. 7 Potret Fase Bifurkasi *Transcritical***

Berikut ini diagram bifurkasi *transcritical* Persamaan (2.32a) dan (2.32b)




(a) Diagram bifurkasi 2.32a (b) Diagram bifurkasi 2.32b

**Gambar 2. 8 Diagram Bifurkasi *Transcritical***

c. Bifurkasi *Hopf*

Menurut Guckenheimer dalam bukunya (Guckenheimer,1985:151-152), terjadinya bifurkasi *hopf* di titik ekuilibrium $(x_0, c_0)$ ditandai dengan

$D_x(f(x_0, c_0))$ mempunyai sepasang nilai eigen imajiner murni dan tidak ada nilai eigen lain dengan bagian real nol, serta memenuhi kondisi transversal yaitu $\frac{d}{dc}(Re(\lambda(c))) \neq 0$. Bentuk normal bifurkasi *Hopf* adalah sebagai berikut: (Kuznetsov, 1998:100)

$$\dot{x} = \alpha x - y \pm x(x^2 + y^2),$$
$$\dot{x} = x + \alpha y \pm y(x^2 + y^2),$$

Atau bila diubah dalam koordinat polar adalah sebagai berikut :

$r^2 = x^2 + y^2$

$\leftrightarrow 2r\dot{r} = 2x\dot{x} + 2y\dot{y},$

$\leftrightarrow \dot{r} = \frac{x\dot{x}+y\dot{y}}{r},$

$\leftrightarrow \dot{r} = \frac{x\left(\alpha x - y \pm x(x^2+y^2)\right) + y(x + \alpha y \pm y(x^2+y^2))}{r}$

$\leftrightarrow \dot{r} = \frac{\alpha(x^2+y^2) \pm (x^2+y^2)^2}{r},$

$\leftrightarrow \dot{r} = \alpha r \pm r^3.$

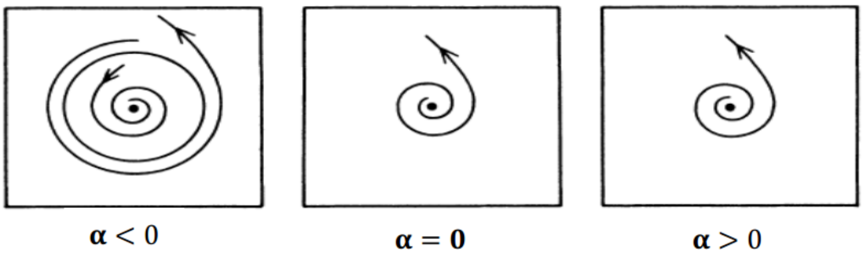
Sehingga diperoleh bentuk standar bifurkasi Hopf pada koordinat polar yaitu

$\dot{r} = \alpha r + r^3$ ...............................(2.33a)

dan

$\dot{r} = \alpha r - r^3$ ...............................(2.33b)

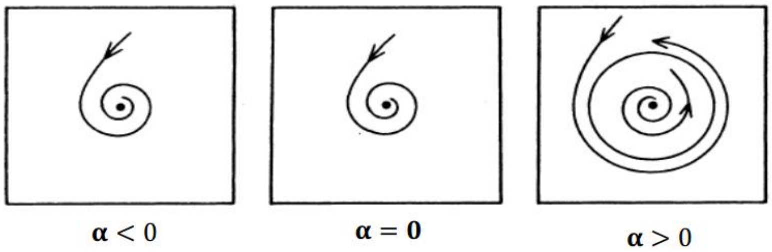
Solusi dari Persamaan (2.33a) ditunjukkan pada Gambar 2.6 (Wiggins, 2003:381)




**Gambar 2. 9. Solusi $\dot{r} = \alpha r + r^3$**

Ketika $\alpha < 0$ maka sistem stabil asimtotik dan membentuk orbit periodik yang tidak stabil, ditunjukkan dengan ketika mengambil titik awal jauh dari titik ekuilibrium solusi menjauhi titik sedangkan ketika diambil titik awal dekat dengan titik ekuilibrium solusi mendekati titik. Untuk $\alpha = 0$ dan $\alpha > 0$ maka sistem tidak stabil, ditunjukkan dengan ketika diambil titik awal, solusi menjauhi titik ekuilibrium.

Sedangkan solusi dari Persamaan (2.33b) ditunjukkan pada Gambar 2.7. (Wiggins, 2003: 381)




**Gambar 2. 10. Solusi $\dot{r} = \alpha r - r^3$**

Ketika $\alpha < 0$ dan $\alpha = 0$ maka sistem stabil asimtotik, ditunjukkan dengan ketika diambil titik awal, solusi mendekati titik ekuilibrium. Ketika $\alpha > 0$ sistem tidak stabil dan membentuk orbit periodik yang stabil, ditunjukkan dengan ketika mengambil titik awal jauh dari titik ekuilibrium solusi mendekati titik sedangkan ketika diambil titik awal dekat dengan titik ekuilibrium solusi menjauhi titik.

### *H. Manifold Center*

Ketika suatu sistem memiliki nilai eigen yang pada bagian realnya adalah nol, maka kestabilan sistem tidak dapat dilakukan dengan melihat kestabilan linearisasi sistemnya. Sehingga, analisis kestabilan sistem dilakukan dengan normalisasi sistem menggunakan teorema *manifold center*.

Sebuah sistem persamaan differensial didefinisikan sebagai berikut: (Wiggins, 2003: 246)

$$\dot{x} = Ax + f(x, y)$$
$$\dot{y} = Ay + g(x, y), \quad (x, y) \in R^s \times R^c \quad \ldots\ldots(2.34)$$

dimana,

$$f(0,0) = 0, Df(0,0) = 0$$
$$g(0,0) = 0, Dg(0,0) = 0$$

dengan A adalah matriks $n \times n$ dengan nilai eigen tidak hiperbolik, B matriks $s \times s$ dengan nilai eigen hiperbolik negatif, dimana $f$ dan $g$ adalah fungsi

$C^r(r \geq 2)$. Misalkan Persamaan (2.34) bergantung pada parameter, $\varepsilon \in \mathbb{R}^p$, maka sistem persamaan differensial dapat ditulis sebagai berikut :

$$\dot{x} = Ax + f(x, y, \varepsilon)$$

$$\dot{y} = Ay + g(x, y, \varepsilon), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.35)$$

dimana,

$$f(0,0,0) = 0, Df(0,0,0) = 0$$

$$g(0,0,0) = 0, Dg(0,0,0) = 0$$

Dengan $A$ matriks $n \times n$ dengan nilai eigen tidak hiperbolik, $B$ matriks $s \times s$ dengan nilai eigen hiperbolik negatif, dimana $f$ dan $g$ adalah fungsi $C^r(r \geq 2)$.

Untuk menyelesaikan Sistem (2.35) kita menyertakan parameter $\varepsilon$ sebagai variabel bebas baru sebagai berikut :

$$\dot{\varepsilon} = 0, \qquad (x, y, \varepsilon) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^s \ldots(2.36)$$

$$\dot{y} = By + g(x, y, \varepsilon)$$

Dinamik dari (2.35) dibatasi oleh *manifold center* untuk $u$ yang cukup kecil :

$$(u, \varepsilon) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s$$

$$\dot{u} = Ax + f(u, h(u, \varepsilon), \varepsilon)$$

$$\dot{\varepsilon} = 0$$

Selanjutnya, akan diturunkan persamaan $h(x)$ yang harus dipenuhi sehingga dapat kita menggambarkan *manifold center* dari (2.35). Misalnya kita memiliki persamaan *manifold center* :

$$W_{loc}^n(0) = \left\{ \begin{matrix} (x, y, \varepsilon) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^s | y = h(x, \varepsilon), |x| < \delta, |\varepsilon| < \bar{\delta}, \\ h(0,0) = 0, Dh(0,0) = 0 \end{matrix} \right\}, \ldots\ldots 2.37)$$

Untuk $\delta$ dan $\bar{\delta}$ cukup kecil. Dengan menggunakan invariant dari $W_{loc}^n$ terhadap Persamaan (2.35), kita dapat menurunkan persamaan differensial parsial yang harus dipenuhi oleh $h(x, \varepsilon)$:

$$\dot{y} = D_x h(x, \varepsilon)\dot{x} + D_\varepsilon h(x, \varepsilon)\dot{\varepsilon} = Bh(x, \varepsilon) + g(x, h(x, \varepsilon), \varepsilon) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.38)$$

Kemudian dengan mensubtitusi

$$\dot{x} = Ax + f(x, h(x, \varepsilon), \varepsilon) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.39)$$

$$\dot{\varepsilon} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2.40)$$

ke persamaan (2.38) diperoleh,

$\mathcal{N}(h(x,\varepsilon) = D_x h(x,\varepsilon)[Ax + f(x, h(x,\varepsilon),\varepsilon)] - B(h(x,\varepsilon) - g(x, h(x,\varepsilon),\varepsilon) =$
$0$ ……………………………………………………….. ………….. ………(2.41)

Persamaan (2.41) merupakan persamaan *manifold center*.